Métriques riemanniennes

Exercice 1.— Isométries affines

1. Soit $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ une application qui préserve la distance euclidienne, où V est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

   Montrer que ψ est une isométrie affine.

2. Soit $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'en tout point, sa différentielle en ce point est une isométrie euclidienne.

   Montrer que φ est une isométrie affine.

Exercice 2.— Inversions

Montrer que la différentielle en un point d'une inversion de centre Ω et rayon R est la composée d'une homotétie (donner son rapport) et d'une symétrie orthogonale. Vérifier que la projection stéréographique peut être vue comme la restriction d'une inversion.

Exercice 3.— Deux modèles de l'espace hyperbolique

1. Montrer que les variétés riemaniennes $D^n := (\{x \in \mathbf{R}^n, |x|^2 < 1\}, \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}$ et $\mathbf{H}_n := (\{x \in \mathbf{R}^n, x_n > 0\}, \frac{|dx|^2}{x_n^2})$ sont mises en isométrie par l'inversion par rapport à la sphère de centre $(0, \ldots, 0, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. On identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$. On rappelle le lemme de Schwarz : une application holomorphe $f : D^2 \to D^2$ vérifie

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

   pour tout $z \in D^2$. Montrer que les applications holomorphes $D^2 \to D^2$ contractent la métrique riemanienne définie ci-dessus sur D^2.

Exercice 4.— Distance des longueurs de chemins

Dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne, la distance des chemins est égale à la distance euclidienne, et un unique chemin (modulo paramétrage) réalise cette distance. En serait-il de même avec une autre norme sur $\mathbf{R}^n$?

Exercice 5.— Géodésiques minimisantes

Une géodésique minimisante de (M, g) entre deux points $p, q \in M$ est un chemin $\gamma : [a, b] \to M$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux paramétré à vitesse constante qui minimise la longueur des chemins de p à q.

1. Quelles sont les géodésiques minimisantes entre deux points de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n_{can}$?
2. On munit le cercle $S^1 \subset \mathbf{R}^2_{can}$ de la métrique riemanienne induite par l'inclusion.

   Quelles sont les géodésiques minimisantes de S^1 ?

   Montrer que la distance intrinsèque sur S^1 entre p et q est $\arccos(p.q)$.
3. On munit la sphère $S^2 \subset \mathbf{R}^3_{can}$ de la métrique riemanienne induite par l'inclusion.

   A l'aide de coordonnées sphériques, montrer que les arcs de grand cercles verticaux au plus égaux à un demi-cercle sont des géodésiques minimisantes.

   Quelles sont les géodésiques minimisantes de la sphère S^2 ?

   Montrer que la distance intrinsèque sur S^2 entre p et q est $\arccos(p.q)$.

Exercice 6.— Formule de Girard
Le but de l'exercice est de montrer que la somme des angles d'un triangle sphérique vaut son aire plus π.

1. Montrer qu'un triangle sphérique est déterminé par ses angles à isométrie près.
2. On note $A(\alpha, \beta, \gamma)$ l'aire d'un triangle d'angles α, β, γ, montrer que cette aire est bien définie.
3. On veut montrer

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \ .$$

   (a) On appelle lunule d'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ la région délimitée par deux grands demi-cercles se croisant avec un angle α. Montrer qu'une lunule d'angle α est d'aire 2α.

   (b) En décomposant une lunule d'angle α montrer que

$$A(\alpha, \beta, \gamma) + A(\alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma) = 2\alpha$$

   et trouver des égalités analogues pour les angles β et γ.

   (c) En décomposant un hémisphère en quatre triangles, montrer que

$$A(\alpha, \beta, \gamma) + A(\alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma) + A(\pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma) + A(\pi - \alpha, \beta, \pi - \gamma) = 2\pi \ .$$

(d) Conclure.

Exercice 7.— Trigonométrie sphérique
Soient A, B, C trois points non coplanaires de la sphère unité $S^2 \subset \mathbf{R}^3_{can}$, ils déterminent un triangle ABC d'angles α en A, β en B, γ en C et de côtés $a := BC$, $b := AC$ et $c := AB$.

1. Montrer qu'à isométrie près, le triangle ABC est déterminé par ses côtés et aussi déterminé par ses angles.
2. Montrer que $\cos a = B.C$ et $\sin a = \frac{A\wedge B.A\wedge C}{|A\wedge B||A\wedge C|}$, et montrer les formules analogues pour b et c.
3. Vérifier que
$$x \wedge y.z \wedge t = (x.z)(y.t) - (x.t)(y.z)$$
$$(x \wedge y) \wedge z = (x.z)y - (y.z)x \ .$$
4. Montrer que
$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$
et les formules analogues pour β et γ.
5. Au triangle ABC on associe le triangle $A^*B^*C^*$ donné par les normales intérieures aux plans contenant les côtés. Montrer que les côtés de $A^*B^*C^*$ sont donnés par
$$a^* = \pi - \alpha,\ b^* = \pi - \beta,\ c^* = \pi - \gamma \ .$$
6. Montrer que $(A^{**}, B^{**}, C^{**}) = (\epsilon A, \epsilon B, \epsilon C)$ où $\epsilon = \pm 1$ est l'orientation du repère (A, B, C).
7. Montrer que
$$\cos a = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \ .$$
8. Montrer l'expression d'un côté en fonction des deux autres et de l'angle opposé et celle d'un angle en fonction des deux autres et du côté opposé :
$$\cos a = \cos b\cos c + \cos\alpha\sin b\sin c$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \cos a\sin\beta\sin\gamma \ .$$
9. Réécrire les formules précédentes pour une sphère de rayon R. Que se passe-t-il quand $R \to 0$? Et quand $R = i$?

Groupe de Möbius

Exercice 1.— Groupe de Möbius On appelle *sphère* de $S^n := \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ une sphère euclidienne de centre $x \in \mathbf{R}^n$ et de rayon $r > 0$ ou un hyperplan affines de $\mathbf{R}^n$ et on appelle *réflexion* par rapport à cette sphère l'inversion ou la réflexion par rapport à cette sphère. On appelle *transformation de Möbius* une composée d'un nombre fini de réflexions, on note M_n le groupe de Möbius.

1. Montrer que les translations et les dilations de $\mathbf{R}^n$ sont des transformations de Möbius.
2. Montrer qu'une isométrie de $\mathbf{R}^n$ muni de la métrique euclidienne est une composée d'au plus $n+1$ réflexions par rapport à des hyperplans affines. Montrer que ce nombre est optimal dans le cas de $\mathbf{R}^2$.
3. Montrer que deux réflexions sont conjuguées dans le groupe de Möbius.
4. Montrer qu'une réflexion renverse l'orientation de $\mathbf{R}^n$ et qu'elle est conforme (*i.e.* que sa différentielle est une similitude en tout point).
5. Montrer que l'image d'une sphère par une transformation de Möbius est une sphère.
6. Soit Σ une sphère et $f \in M_n \setminus \{1\}$ dont la restriction à Σ est l'identité. Montrer que f est la réflexion par rapport à Σ.

Exercice 2.— Extension de Poincaré On note $i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ l'inclusion. On étend l'inversion par rapport à une sphère centrée $a \in \mathbf{R}^n$ en une inversion par la sphère de $\mathbf{R}^{n+1}$ centrée en $i(a)$ de même rayon. On étend l'inversion par rapport à un hyperplan P en l'inversion par rapport à l'hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$ vertical contenant P.

1. Montrer qu'une telle extension se restreint en une isométrie du demi-espace $H_n := \{(x_1, \ldots, x_{x+1}) \in \mathbf{R}^{n+1},\ x_{n+1} > 0\}$ muni de la métrique $\frac{|dx|^2}{x_n^2}$.
2. Montrer que les réflexions de $\mathbf{R}^n$ qui stabilisent la boule unité D^n sont les réflexions par rapport aux sphères orthogonales à la sphère unité S^{n-1}.

Groupe de Möbius

Exercice 3.— Un théorème de Liouville

1. Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $g : U \subset \mathbf{R}^n \to V \subset \mathbf{R}^n$ un difféomorphisme entre ouverts connexes de $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^4$, conforme pour la métrique canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. On veut montrer que g est la restriction à U d'une transformation de Möbius.
   (a) Montrer que si le rapport de la similitude Dg, $c : x \in U \mapsto |D_x g| \in \mathbf{R}_{>0}$, est une fonction constante, alors g est une similitude affine. (Indication : exercice 1 TD 1.)
   (b) Montrer que s'il existe $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tels que le rapport de la similitude Dg soit une fonction $x \mapsto \frac{\lambda}{|x-x_0|^2}$ alors g la composée d'une inversion de centre x_0 et de rayon $\sqrt{\lambda}$ et d'une isométrie affine.
   (c) Montrer que pour $x \in \mathbf{R}^n$ et h, k, l trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ deux à deux orthogonaux, $D_x^2 g(h,k).D_x g(l) = 0$.
   (d) En déduire que pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $h, k \in \mathbf{R}^n$,
   $$D_x^2 g(h,k) = \frac{D_x c(k)}{c(x)} D_x g(h) + \frac{D_x c(l)}{c(x)} D_x g(k) \ .$$
   (e) Pour une base orthogonale (h,k,l), décomposer $D_x^3 g(h,k,l)$ dans la base orthogonale $(D_x g(h), D_x g(k), D_x g(l))$. En déduire que pour $x \in U$ et h, k deux vecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^n$, $D_x^2(c^{-1})(h,k) = 0$.
   (f) En déduire qu'il existe une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in U$, et pour tous vecteurs h, k quelconques, $D_x^2(c^{-1})(h,k) = f(x)(h.k)$.
   (g) En différentiant l'égalité précédente, montrer que f est une application constante.
   (h) En déduire qu'il existe a, b des réels et $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tels que $c^{-1}(x) = a|x-x_0|^2 + b$.
   (i) Montrer qu'il existe a', b' des réels et $g_0 \in \mathbf{R}^n$ tels que $c^{-1}(g(x)) = a'|g(x)-g_0|^2 + b'$. En déduire
   $$(a|x-x_0|^2 + b)(a'|g(x)-g_0|^2 + b') = 1$$
   .

(j) En déduire que g envoie toute sphère centrée en x_0 en une sphère centrée en $g(x_0)$., puis que g envoie toute demi-droite passant par x_0 sur une demi-droite passant par $g(x_0)$.

(k) Soit u un vecteur unitaire tel que $|D_x g(u)| = c(x)$, on note $\gamma : t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \to x_0 + tu$. En résolvant l'équation $|(g \circ \gamma)|'(t) = (c \circ \gamma)(t)$, montrer que $a = 0$ ou $b = 0$.

(l) Conclure en utilisant la première question.

2. (a) Montrer qu'un biholomorphisme $f : U \subset \mathbf{C} \to V \subset \mathbf{C}$ est un difféomorphisme conforme de $\mathbf{R}^2$ qui préserve l'orientation.

   (b) Montrer que $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \to z^2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ est un tel biholomorphisme qui n'est pas la restriction d'une transformation de Möbius.

3. (a) Montrer que les biholomorphismes de la droite projective complexe $P(\mathbf{C}^2) = S^2$ sont les difféomorphismes conformes qui préservent l'orientation.

   (b) Montrer que l'action par isomorphismes linéaires de $GL(2, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^2$ induit une action de $PGL(2, \mathbf{C})$ sur la droite projective complexe $P(\mathbf{C}^2)$ par biholomorphismes.

   (c) Montrer qu'un biholomorphisme de $P(\mathbf{C}^2) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui fixe ∞ se restreint en un biholomorphisme $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui vérifie : il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| \leq C|z|$. Alors par le théorème de Liouville (celui d'analyse complexe) il existe $a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = az + b$.

   (d) Montrer que le groupe des biholomorphismes de $P(\mathbf{C}^2)$ s'identifie (via l'action ci-dessus) à $PGL(2, \mathbf{C})$.

Isométries du plan hyperbolique

Exercice 1.— Elliptique, parabolique ou hyperbolique

1. (a) Montrer que l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ donnée par
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .x = \frac{ax+b}{cx+d}$$
se fait par transformations de Möbius qui préservent l'orientation.
   (b) Montrer que l'action ci-dessus induit un isomorphisme de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ vers le groupe des isométries M_{1+} de $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ qui préserve l'orientation.
   (c) Montrer que tout élément de $M_{1+} \setminus \{1\}$ a $0, 1$ ou 2 points fixes.
   (d) Montrer que $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est isomorphe au groupe des isométries du demi-plan hyperbolique $\mathbf{R}^2_+$ préservant l'orientation $Isom_+(\mathbf{R}^2_+)$.
2. On dit qu'un élément de $Isom_+(\mathbf{R}^2_+)$ est elliptique, parabolique ou hyperbolique si sa restriction au bord $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ de $\mathbf{R}^2_+$ a $0, 1$, ou 2 points fixes.
   (a) On note, pour $k \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $m_k(z) = kz$, $m_1(z) = z + 1$ sur le demi-plan ; pour $\theta \in \mathbf{R}$ on note r_θ la rotation d'angle θ dans le modèle du disque. Montrer que les m_k et r_θ définissent des éléments de $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{R}^2_+)$. Déterminer s'ils sont elliptiques, paraboliques ou hyperboliques.
   (b) Quelles sont les classes de conjuguaison dans $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{R}^2_+)$?
   (c) Vérifier que la quantité $T := \frac{Tr^2}{\det}$ est bien définie sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et qu'elle est invariante par conjuguaison. Que peut-on dire sur l'ellipticité, la parabolicité ou l'hyperbolicité d'un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ suivant la valeur de T ?
   (d) Montrer que tout élément hyperbolique s'écrit comme la composée de deux réflexions d'axes des géodésiques maximales γ et δ disjointes (même étendues au bord).
   (e) Montrer qu'on peut écrire tout élément elliptique ou parabolique comme composée de réflexions d'axes des géodésiques maximales.

Exercice 2.— Distance entre deux géodésiques

Soient α et γ deux géodésiques maximales du plan hyperbolique.

1. Montrer que γ et δ sont disjointes (mêmes étendues au bord) si et seulement s'il existe une géodésique othogonale à γ et δ.
2. Montrer que la distance hyperbolique $\inf\{d(p,q) | p \in \gamma, q \in \delta\}$ entre α et γ est la longueur de la géodésique orthogonale à γ et δ les reliant.

Exercice 3.— Un groupe de Schottky

Soient f_0, g_0 deux transformations hyperboliques. Soient F_-, F_+ (respectivement G_-, G_+) deux sous-ensembles du disque fermé $\overline{D}^2$, ouverts connexes pour la topologie euclidienne, contenant chacun un point fixe de f (respectivement de g) tels que F_-, F_+, G_-, G_+ soient disjoints deux à deux. On note R l'union de ces quatre sous-ensembles.

1. Montrer qu'il existe $M, N \in \mathbf{Z}$ tels que $f_0^M({}^cF_-) \subset F_+$ [1] et $g_0^N({}^cG_-) \subset G_+$.
2. On note $f := f_0^M$ et $g := g_O^N$, et A le sous-groupe des isométries du disque hyperbolique engendré par $\{f, g\}$. Soit $w \in A \setminus \{1\}$. Montrer que $w({}^cR) \subset R$.
3. En déduire que A est isomorphe au groupe libre à deux éléments.
4. Soit $g \circ w$ un élément de $A \setminus \{1\}$ qui correspond à un mot réduit en f, g qui ne se termine pas par g^{-1}. Montrer que $g \circ w(G_+) \subset G_+$.
5. En déduire que $g \circ w$ a un point fixe dans $\partial D^2 \subset G_+$.
6. Trouver un second point fixe de $g \circ w$ sur le bord.
7. Montrer tout élément de $A \setminus \{1\}$ est hyperbolique.

1. on note ^{c} le complémentaire d'un sous-ensemble de $\overline{D}^2$

Distances et angles

Exercice 1.— Différentielle de la distance Le gradient d'une fonction $f : (M, g) \to \mathbf{R}$ définie sur une variété riemanienne et différentiable en un point $p \in M$ est l'unique vecteur $\nabla_p f \in T_pM$ qui vérifie pour tout vecteur $v \in T_pM, g(\nabla_p f, v) = d_p f(v)$.
Soit $P \in H_n$ un point de l'espace hyperbolique. On note $f : X \in H^n \mapsto d_{H_n}(X, P)^2$ la fonction distance à P au carré. Montrer que pour tout $X \in H_n, \nabla_X f$ est l'unique vecteur de $T_X H_n$ de norme $2d(X, P)$ pointant dans la direction opposée à la géodésique qui part vers P.

Exercice 2.— Birapport sur le disque de Poincaré On identifie le disque hyperbolique et son bord à l'infini avec le disque unité de $\mathbf{C}$. Soient p, q deux points distincts de D^2. On note γ l'unique géodésique de p vers q et $a = \gamma(-\infty), b = \gamma(+\infty)$. Montrer que

$$d_{D^2}(p, q) = \log \frac{(q-a)(b-p)}{(p-a)(b-q)} \ .$$

Exercice 3.— Distance et angle entre un point et une droite Soit p un point de l'espace hyperbolique et γ une géodésique complète ne passant pas par p. On note α l'angle que forment en p la géodésique qui joint p et une extémité de γ et la géodésique qui joint p et l'autre extrémité de γ.
Montrer que $\sinh d(p, \gamma) = \cot \alpha$.

Exercice 4.— Au plus un axe Soit f une isométrie de l'espace hyperbolique H^3 qui préserve l'orientation. Un *axe* de f est une géodésique que f stabilise et sur laquelle la restriction de f est soit l'identité, soit une transformation sans point fixe. On suppose que f a deux axes γ et δ.

1. On suppose que $f|_\gamma$ n'a aucun point fixe.
   (a) Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto d(\delta, \gamma(t))$ est périodique.
   (b) En déduire que les images respectives des géodésiques γ et δ ont les mêmes extrémités.
   (c) Montrer que γ et δ ont leur images respectives confondues.
2. On suppose que $f|\gamma$ et $f|_\delta$ sont l'identité.

(a) On suppose qu'il existe p un point de $\gamma \setminus \delta$, montrer que f est l'identité sur la surface totalement géodésique qui contient p et δ.

(b) En déduire que f est l'identité.

3. Donner une isométrie non triviale de H^3 qui renverse l'orientation et qui stabilise une infinité de géodésiques distinctes.

Exercice 5.— Les triangles hyperboliques sont fins On dit qu'un triangle de l'espace hyperbolique est fin si pour tout point sur un côté du triangle, il existe un autre côté à distance moins de $\log(1+\sqrt{2})$ de ce point.

1. Montrer qu'un triangle dont tous les sommets sont à l'infini est fin.
2. Soit T un triangle et p un point sur un côté de T. On note δ le minimum de la distance de p aux deux autres côtés. Montrer qu'il existe une isométrie (dans le modèle du demi-plan) qui envoie T sur un triangle dont le côté $[A, B]$ qui contient p est un arc de cercle centré en l'origine, dont le troisième sommet C est relié à un des deux autres par une droite verticale et qui est au-dessus du demi disque.
3. Soit U le triangle $AB\infty$. Montrer que la distance de p aux deux autres côtés de U est supérieure ou égale à δ.
4. Soit V le triangle formé de l'intersection de (AB) avec le cercle à l'infini. Montrer que la distance de p aux deux autres côtés de V est supérieure ou égale à δ.
5. Conclure.

Angles et aires

Exercice 1.— Distances à l'infini Soient E, F deux fermés disjoints de $\overline{D}^n$. Soit (p_n) une suite dans E qui converge vers $p \in \partial D$, montrer que la distance hyperbolique $d_{hyp}(p_n, F) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.— Longueur finie Soit T un triangle hyperbolique qui a un coté de longueur finie c. Montrer que l'aire de T est strictement inférieure à c. On pourra montrer d'abord que l'aire de T est inférieure ou égale à l'aire d'un triangle dont un sommet est au bord.

Exercice 3.— Convexité de la distance ? Soient σ et τ deux géodésiques de l'espace euclidien paramétrées par longueur d'arc, d'images distinctes. La fonction $(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto d(\sigma(s), \tau(t))$ est-elle convexe ? Soient σ et τ deux géodésiques minimisantes de la sphère unité euclidienne, paramétrées par longueur d'arc, d'images distinctes, $(s,t) \mapsto d(\sigma(s), \tau(t))$ est-elle convexe ?

Exercice 4.— Polygones hyperboliques Montrer que l'aire d'un polygone hyperbolique convexe du plan est $(n-2)\pi - S$ où n est le nombre de côtés et S la somme des angles intérieurs.

Exercice 5.— Tétraèdre idéal Soient A, B, C, D quatre points de l'espace hyperbolique qui sont dans le bord $\partial H_3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ de l'espace hyperbolique et non alignés 3 à 3.

1. Montrer que le groupe des isométries qui préserve l'orientation de l'espace hyperbolique de dimension 3 agit 3-transitivement.
2. Dans le modèle de la boule unité, montrer que chaque face du tétraèdre idéal intersecte le bord en un cercle. On note $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ les angles respectifs formés formés par deux faces qui s'intersectent en un sommet fixé (A par exemple). Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Montrer que le tétraèdre idéal est entièrement déterminé α, β, γ.
3. Soit $V(z)$ le volume du tétraèdre idéal décrit par les points distincts $0, 1, \infty, z$ de $\partial H_3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que

$$V(z) = V(\frac{1}{1-z}) = V(\frac{z-1}{z}) = V(1-z) = V(\frac{1}{z}),$$

puis montrer que pour w un point du bord distinct des quatre autres

$$V(z) + V(w) = V(\frac{z}{w}) + V(\frac{z-w}{1-w}) + V(\frac{(1-z)w}{w-z}) \ .$$ [1]

1. on pourra décomposer deux tétraèdres adjacents en une face en trois tétraèdres

Géométrie des triangles et topologie du groupe d'isométries

Exercice 1.— Les aires des triangles
Comme nous avons vu dans le TD1, dans la géometrie sphérique (sur la sphère de rayon 1) la somme des angles d'un triangle sphérique vaut son aire S plus π : pour un triangle avec des angles α, β, γ son aire est égale a $S = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$. Nous allons prouver que l'aire du triangle hyperbolique est défini par la formule suivante : $S = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$.

1. Un triangle est *idéal* si tous ses sommets sont à l'infini. Montrer que tous les triangles idéaux sont congruents.
2. Calculer l'air des triangles idéaux en choisissant le représentant de cette famille pour lequel les calculs sont les plus simples possible
   Un triangle est à $\frac{2}{3}$ *idéal* si il a exactement deux sommets à l'infini. Supposons l'angle du sommet restant est $\pi - \theta$, et notons $A(\theta)$ l'air de ce triangle.
3. Pourquoi la fonction $A(\theta)$ est bien définie ? Prouver que c'est une fonction linéaire en θ : $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$.
4. Déduire que $A(\theta) = \theta \ \ \forall \theta \in (0, \pi)$.
5. Déduire la formule générale pour l'aire du triangle avec les angles α, β et γ.
6. (Théorème de l'Huilier) * Déduire la liaison entre l'aire du triangle sphérique et les longueurs de ses côtés a, b, c :

$$S = 4 \arctan \sqrt{\arctan \frac{s}{2} \arctan \frac{s-a}{2} \arctan \frac{s-b}{2} \arctan \frac{s-c}{2}},$$

   où $s = \frac{a+b+c}{2}$.
   Reécrire cette formule pour la sphére de rayon différent de 1. Qu'est-ce qu'elle donne quand $R \to \infty$?

Exercice 2.— Un groupe de Schottky
Soient f_0, g_0 deux transformations hyperboliques. Soient F_-, F_+ (respectivement G_-, G_+) deux sous-ensembles du disque fermé $\overline{D}^2$, ouverts connexes pour la topologie euclidienne, contenant chacun un point fixe de f (respectivement de g) tels que F_-, F_+, G_-, G_+ soient disjoints deux à deux.

Il existe $M, N \in \mathbf{Z}$ tels que $f_0^M({}^cF_-) \subset F_+$ et $g_0^N({}^cG_-) \subset G_+$. On note $f := f_0^M$ et $g := g_O^N$, et A le sous-groupe des isométries du disque hyperbolique engendré par $\{f, g\}$. Il s'avère que A est isomorphe au groupe libre à deux éléments.

1. Soit $g \circ w$ un élément de $A \setminus \{1\}$ qui correspond à un mot réduit en f, g qui ne se termine pas par g^{-1}. Montrer que $g \circ w(G_+) \subset G_+$.
2. En déduire que $g \circ w$ a un point fixe dans $\partial D^2 \subset G_+$.
3. Trouver un second point fixe de $g \circ w$ sur le bord.
4. Montrer tout élément de $A \setminus \{1\}$ est hyperbolique.

Exercice 3.— Un peu de groupes Fuchsiens
Nous avons vu dans le TD3 que PSL$(2, \mathbf{R})$ est isomorphe au groupe des isométries du demi-plan hyperbolique $\mathbf{R}_+^2$ préservant l'orientation $Isom_+(\mathbf{R}_+^2)$.

1. Prouver que deux éléments de $PSL(2, \mathbf{R})$ commutent si et seulement leurs ensembles des points fixes coïncident.
2. Quels sont alors des commutants des éléments de $PSL(2, \mathbf{R})$?
   On peut définir la topologie sur $PSL(2, \mathbf{R})$ grâce à la topologie qui provient de $\mathbf{R}^4$.
3. $PSL(2, \mathbf{R})$ est alors un groupe topologique.
   Un groupe Fuchsien est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbf{R})$.
4. Prouver que chaque groupe Fuchsien abélien est cyclique. Étudier les cas quand ce groupe est engendré par un élément hyperbolique/parabolique/elliptique.
5. Est-ce qu'il existe un groupe Fuchsien libre ?
6. (Décomposition de Iwasawa) Démontrer qu'il y a une decomposition $SL_2(\mathbf{R}) = NAK$: chaque $g \in SL_2(\mathbf{R})$ se représente de la unique façon comme le produit $g = nak, n \in N, a \in A, k \in K$ où
   $$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, r \in \mathbf{R}_+ \right\}, K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in S^1 \right\}.$$
7. Prouver que Γ est Fuchsien si et seulement si il agit proprement discontinuement sur $\mathbf{R}_+^2$ (les orbites sont discretes et les stabilisateurs finis).
8. Est-ce que cette équivalence est vraie en général pour tout groupe discret (pas forcement sous-groupe de $PSL(2, \mathbf{R})$?
9. Nous avons vu que si $T_n \to I \in PSL(2, \mathbf{Z})$ alors $T_n z \to z \ \forall z \in \mathbf{R}_+^2$. Est-ce que la relation entre ces deux convergences est uniforme ? Autrement dit, est-ce qu'on peut écrire $d(z, T_n z) \leq C||T_n - I||$ avec C qui ne dépend pas de z ? Étudier le cas de $T_n = T^n$ où T - hyperbolique/parabolique/elliptique. Conclure : aucune isométrie hyperbolique ne déplace les points à la même distance.

Géodésiques

Exercice 1.— Angle d'intersection avec une famille de géodésiques
Soit (M, g) une variété riemanienne et $f : [0,1]^2 \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in [0,1]$,

1. $f(t, \cdot)$ est une géodésique parcourue à vitesse 1,
2. $f(\cdot, 0)$ est orthogonale à $f(t, \cdot)$.

Montrer que $f(\cdot, s)$ est orthogonale à $f(t, \cdot)$ pour tous $(t, s) \in [0,1]^2$.

Exercice 2.— Avec un chapeau

1. Montrer qu'un cône C (ouvert, sans son sommet) de $\mathbf{R}^3$ euclidien, muni de la métrique riemannienne induite, est localement isométrique au plan euclidien standard. Est-il globalement isométrique à un ouvert du plan ?
2. Dans le plan euclidien standard, décrire le transport parallèle le long de tout chemin.
3. Calculer le résultat du transport parallèle d'un vecteur tangent à la sphère (munie de sa métrique riemannienne induite par $\mathbf{R}^3$) le long d'un parallèle de latitude constante. Indication : on pourra comparer avec le cône tangent à ce parallèle.

Exercice 3.— Collier et Fronce
Soit $a > 1$. On pose $D_h = \{1 \leq |z| \leq a \ , \ \Im z > 0\} \subset \mathbf{R}^2_+$

1. Montrer que le quotient de D_h par la relation d'équivalence $z \sim az$ a une structure de surface hyperbolique H qui coïncide sur l'intérieur de D_h avec la structure hyperbolique induite par l'inclusion. On pourra (en notant $\pi : D_h \to H$ l'application quotient) montrer que les applications

$$f_- : \pi^{-1}\{|z| \neq a^{1/2}\} \to \{a^{-1/2} < |z| < a^{1/2} \ , \ \Im z > 0\}$$
$$\pi^{-1}(z) \mapsto z \text{ si } |z| < a^{1/2} \text{ et } a^{-1}z \text{ sinon,}$$

$$f_+ : \pi^{-1}\{|z| \neq a^{1/2}\} \to \{a^{1/2} < |z| < a^{3/2} \ , \ \Im z > 0\}$$
$$\pi^{-1}(z) \mapsto az \text{ si } |z| < a^{1/2} \text{ et } z \text{ sinon}$$

et l'identité $\{1 < |z| < a \ , \ \Im z > 0\} \to \{1 < |z| < a \ , \ \Im z > 0\}$ forment un atlas de H.

2. Montrer que dans H il existe un unique lacet géodésique, quelle est sa longueur ?
3. Donner un équivalent de l'aire d'un R-voisinage (hyperbolique) de cette géodésique quand $R \to \infty$. On pourra estimer l'aire d'un quadrilatère de Saccheri (cf le partiel).

Montrer que le quotient $\mathbf{H}^2/(z \sim z+1)$ est une surface hyperbolique.

Exercice 4.— Retour vers le cours
Soit M une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^N$ munie de la métrique induite et Y un champ de vecteurs sur M.

1. Soit $p \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbf{R}^N$ de p et un champ de vecteurs $\tilde{Y}$ défini sur U qui étend $Y|_{U \cap M}$.
2. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur $U \cap M$ et des extensions respectives $\tilde{X}, \tilde{Y}$ à U. Montrer que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ est tangent à M.
3. Revenir vers le cours et montrer que l'application $\nabla : \chi(M) \to \mathcal{E}(M)$ définie par
$$(\nabla_X Y)(p) = \pi_{T_pM}(d_p(\tilde{Y})(X(p)))$$
est bien définie et est la connection de Levi-Civita de M.

Géodésiques

Exercice 1.— Exponentielle et convexité

1. Dans le cas de l'espace euclidien et dans le cas de la sphère euclidienne, décrire l'application exponentielle. Quel est le rayon d'injectivité ?
2. On dit qu'un sous-ensemble A d'une variété riemanienne M est *fortement convexe* si pour tous $p, q \in \overline{A}, p \neq q$ il existe une unique géodésique minimisante $\gamma : [a, b] \to M$ avec $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \gamma(]a, b[) \subset S$. Quels sont les sous-ensembles fortement convexes de l'espace euclidien ?
3. Soit $p \in S^n$, pour quelles valeurs de r le sous-ensemble $\exp_p(B(0, r)) \subset S^n$ est-il fortement convexe ?
4. Montrer qu'un sous-ensemble fortement convexe est contractile sur chacun de ses points.

Exercice 2.— Géodésiques orthogonales à une courbe
Soit (M, g) une variété riemanienne et $f : [0, 1]^2 \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$,

1. $f(t, \cdot)$ est une géodésique parcourue à vitesse 1,
2. $f(\cdot, 0)$ est orthogonale à $f(t, \cdot)$.

Montrer que $f(\cdot, s)$ est orthogonale à $f(t, \cdot)$ pour tous $(t, s) \in [0, 1]^2$.

Exercice 3.— Géodésiques des surfaces de révolution Soit une surface de révolution donnée comme dans l'exercice 1 du TD 7 par le paramétrage

$$(\theta, t) \mapsto (\varphi(t)\cos(\theta), \varphi(t)\sin(\theta), \psi(t)) \ .$$

1. Donner l'équation des géodésiques. Quand est-ce qu'un parallèle est une géodésique, quand est-ce qu'un méridien est une géodésique ?
2. On considère une géodésique, qui est transverse à un parallèle en un point (et donc transverse aux parallèles au voisinage). Montrer que $\varphi^2\dot{\theta}$ est constant.

   En déduire que $r\cos\lambda$ est constante, où λ est l'angle formé par la géodésique avec le parallèle qu'elle intersecte et r sa distance à l'axe $0z$.

3. On considère l'hyperboloïde à une nappe défini par $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et une géodésique qui part d'un point au dessus du plan $z = 0$ en faisant un angle λ avec le parallèle passant par ce point, de sorte que $r\ \cos(\lambda) = 1$. Montrer qu'elle s'accumule autour du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 4.— Complétude M, N désignent des variétés riemaniennes. On dit que M est *prolongeable* si elle est isométrique à un ouvert propre et non vide d'une variété riemanienne connexe.

1. Montrer qu'une variété riemanienne prolongeable n'est pas complète.
2. Montrer que la métrique riemanienne sur $\mathbf{C}$ qui est le rappel de la métrique standard du plan par l'application exponentielle $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ n'est ni complète ni prolongeable.
3. Montrer qu'une variété riemanienne est complète si et seulement si toute courbe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0, b[$ qui sort de tout compact est de longueur infinie.
4. Supposons M connexe complète non compacte. Montrer que pour tout point p de M il existe une géodésique qui vaut p en 0 telle que pour tout $t > 0, \gamma|_{[0,t]}$ est minimisante.

   Soit $f : M \to N$ une application $\mathcal{C}^1$ on suppose N complète.
5. On suppose que f est un difféomorphisme et qu'il existe $C > 0$ tel que $\sup_M |df| < C$. Montrer que M est complète.
6. On suppose que f est une isométrie locale surjective. M est-elle forcément complète ?

Courbure des surfaces de $\mathbf{R}^3$

Exercice 1.— Géodésiques d'une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ Soit M une variété et $i : M \to \mathbf{R}^n$ un plongement, on munit M de la métrique induite par la métrique euclidienne. Soit $\gamma : I \to M$ une courbe $\mathcal{C}^1$. Monter qu'en tout $t \in I$

$$\gamma''(t) = \pi_{T_{\gamma(t)}M}((i \circ \gamma)''(t)) \ .$$

Que vérifient les géodésiques de M ?

Exercice 2.— Courbure de Gauss

1. Soit $v \in T_p\Sigma$, on note P le plan engendré par v et la normale $N(p)$, on prend $\gamma :]\epsilon, \epsilon[\to \mathbf{R}^3$ un paramétrage local par longueur d'arc de $P \cap \Sigma$ au voisinage de p dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = -k\langle N(p), n\rangle_{\mathbf{R}^3}$ où n est la normale à γ en 0 et k la courbure de γ en 0.
2. Soit Σ est une surface compacte sans bord $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^3$ contenue dans une sphère euclidienne de rayon $r > 0$. Montrer que Σ a un point de courbure de Gauss au moins r^{-2}.
3. Montrer qu'on ne peut pas plonger dans $\mathbf{R}^3$ de façon $\mathcal{C}^2$ une surface riemanienne compacte de courbure sectionnelle négative (au sens large).

Exercice 3.— Bertrand-Diquet-Puiseux

1. Soit Σ une surface riemannienne lisse. En passant en coordonnées polaires exponentielles

$$ds^2 = dr^2 + f(r, \theta)d\theta^2 \ ,$$

   en un point $p \in \Sigma$, trouver un développement limité à l'ordre 3 en r de f en fonction de la courbure sectionelle en p.
2. En déduire un développement limité de la longueur du "cercle" donné par : $C_p(r) = \{x \in \Sigma,\ d_g(p, x) = r\}$.
3. Donner un développement limité de l'aire de $D_p(r) = \{x \in \Sigma,\ d_g(p, x) \leq r\}$.
4. En montagne, si on attache une chèvre à un pieu par une corde non élastique, où doit-on placer le pieu pour que la chèvre mange beaucoup ?

Exercice 4.— Caténoïde, Hélicoïde et théorème *egregium*
On considère la surface de révolution engendrée par la chaînette : le caténoïde.

$$c(\theta, t) = (\cosh(t)\cos(\theta), \cosh(t)\sin(\theta), t).$$

1. Calculer la métrique induite à la source du paramétrage.

   Maintenant, on considère l'hélicoïde, paramétré par

   $$h(\theta, t) = (v(t)cos(\theta), v(t)sin(\theta), \theta),$$

   où v est un difféomorphisme croissant de $\mathbf{R}$.

2. Montrer que l'on peut choisir v de sorte que l'hélicoïde et le caténoïde aient la même première forme fondamentale. En déduire la courbure de Gauss de l'hélicoïde.

   Maintenant, on considère la surface de révolution S suivante

   $$g(\theta, t) = (t \sin(\theta), t \cos(\theta), \ln(t)).$$

   Attention, on a échangé cosinus et sinus.

3. Calculer sa courbure de Gauss. Vérifier que si on paramètre l'hélicoïde par

   $$\tilde{h}(\theta, t) = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), \theta) \ ,$$

   la courbure de Gauss de S en $g(\theta, t)$ est égale à celle de l'hélicoïde en $h(\theta, t)$.

4. L'hélicoïde et S sont-elles localement isométriques ?

Produits et submersions riemaniennes

Exercice 1.— Courbure d'un produit Soient $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ deux variétés riemaniennes. On note $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$ la projection sur le j-ième facteur.

1. Montrer que $g := \pi_1^\star g_1 + \pi_2^\star g_2$ définit une métrique riemanienne sur $M_1 \times M_2$.
2. On note D^j (resp. D) la connection de Levi-Civita sur (M_j, g_j) (resp. $(M_1 \times M_2, g)$). Si X_1, X_2 sont des champs de vecteurs respectivement sur M_1, M_2, on définit le champ de vecteurs 'produit' $X := X_1 + X_2$ sur $M_1 \times M_2$ par $X(p_1, p_2) := \{(X_1)(p_1), X_2(p_2)\}$. Montrer que pour deux champs de vecteurs X, Y de type 'produit' :
$$D_X Y = (D^1_{X_1} Y_1, D^2_{X_2} Y_2).$$
3. En déduire une expression du tenseur de courbure de $M_1 \times M_2$ en fonction de ceux de M_1, M_2.
4. En déduire que si M_1, M_2 ont une courbure sectionelle positive (au sens large), alors $M_1 \times M_2$ aussi. Montrer que la courbure sectionelle aux plans de $T_{(q_1,q_2)} M_1 \times M_2$ qui sont engendrés par une famille $(v_1, 0), (0, v_2) \in T_{q_1} M_1 \times T_{q_2} M_2$ est nulle. Montrer qu'une variété riemanienne (M, g) est de courbure nulle si et seulement si son produit $M \times M$ est de courbure sectionelle constante.
5. Décrire la courbure sectionelle de $S^2 \times S^2$. Trouver un 2-tore totalement géodésique de courbure sectionelle nulle dans $S^2 \times S^2$.

Exercice 2.— Seconde forme fondamentale
Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction lisse telle que $f(0) = 0, d_0 f = 0$. On munit l'hypersurface $M := \{(x, f(x)),\ x \in \mathbf{R}^n\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ de la métrique induite. Montrer que $II_M(0) = \pm \frac{1}{2} D_0^2 f$ (le signe dépend du choix de la normale). Résoudre l'exercice 2 du TD 9 avec cette approche.

Exercice 3.— Submersion riemanienne On dit qu'une application entre variétés riemaniennes $f : M \to B$ est une *submersion riemanienne* si c'est une submersion et si en tout $p \in M$, $d_p f$ réalise une isométrie $H_p \subset T_p M \to T_{f(p)} B$. Où on appelle *espace vertical* en p $V_p := T_p(f^{-1}(f(p))) \subset T_p M$ et *espace horizontal* en p $H_p := V_p^\perp \subset T_p M$.

1. Donner un exemple de F, B deux variétés, g une métrique sur B, h une métrique sur $F \times B$ telles que la seconde projection $(F \times B, h) \to (B, g)$ soit une submersion riemanienne, avec des fibres non isométriques deux à deux.
2. Montrer qu'une submersion riemanienne contracte les distances.
3. Soit $p \in M$ et soit γ une géodésique de B qui part de $f(p)$. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ et une géodésique $\tilde{\gamma} :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ telle que $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.
4. Déduire des deux questions précédentes que pour $q \in M$, P un 2-un plan de $T_{f(q)}B$ et $\tilde{P} \subset T_q M$ le relevé horizontal de P en q, la courbure sectionelle au plan P est au moins aussi grande que celle en $\tilde{P}$.
5. Soit $\tilde{\gamma} : I \to M$ une géodésique, $0 \in I$. Montrer que si le vecteur $\gamma'(0)$ est horizontal alors pour tout $t \in I$, le vecteur $\tilde{\gamma}'(t)$ l'est aussi, montrer de plus $f \circ \tilde{\gamma}$ est une géodésique de même longueur que γ.
6. En déduire que si M est complet alors B aussi.

Exercice 4.— Espaces projectifs complexes
On définit $\mathbf{C}P^n$ l'espace projectif complexe de dimension n comme le quotient de $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$ par le groupe $\mathbf{C} \setminus 0$ des dilatations. On munit $S^{2n+1} = \{z := (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \ , \ \sum_j |z_j|^2 = 1\}$ de sa structure euclidienne habituelle.

1. Montrer que l'application quotient $\pi : S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ est une submersion entre variétés lisses et montrer que pour tout $z \in S^{2n+1}$ on a les décompositions orthogonales (pour la métrique euclidienne standard sur $\mathbf{C}^{n+1}$)
$$\mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{R}z \oplus T_z S^{2n+1} = \mathbf{R}z \oplus iz\mathbf{R} \oplus H_z \ .$$
2. Montrer qu'il existe une unique métrique riemanienne σ sur $\mathbf{C}P^n$ telle que $\pi : S^{2n+1} \to (\mathbf{C}P^n, \sigma)$ soit une submersion riemanienne.
3. Soit $z \in S^{2n+1}$ et $v \in H_z$, montrer que le chemin $\gamma : t \in [0, \pi] \mapsto \pi(\cos(t)z + \sin(t)v)$ est de longueur π.
4. Montrer que $(\mathbf{C}P^1, 4\sigma)$ est isométrique à la 2-sphère euclidienne.
5. Montrer que le groupe unitaire $U(n+1)$ agit par isométries sur $(\mathbf{C}P^n, \sigma)$. Montrer qu'à un facteur constant près, σ est l'unique métrique qui a cette propriété.
6. En utilisant l'exercice sur les submersions riemaniennes, trouver les géodésiques de $\mathbf{C}P^n$. Si on lance deux géodésiques du même point, on pourra séparer le cas où les vitesses sont $\mathbf{C}$-linéaires.
7. Quelle est la courbure sectionelle de $\mathbf{C}P^n$ le long des 2-plans réels de $T_p\mathbf{C}P^n$ qui sont l'image par π de sous-espaces $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^{n+1}$ de dimension 2 ?